BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2015*

УДК 517.956

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ЗАПОМИНАЮЩИМ ОПЕРАТОРОМ

С.Э.ИСАЕВА

Бакинский Государственный Университет

isayevasevda@rambler.ru

В данной работе рассматривается смешанная задача для одного полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: запоминающий оператор, ограниченное поглощающее множество, минимальный глобальный аттрактор

Пусть $\Omega \subset R^N \left(N \geq 1\right)$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ. В области $Q = \Omega \times \left(0, T\right)$ рассмотрим следующее полулинейное гиперболическое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left[u + \mathsf{F}(u)\right] + \Delta^2 u + |u|^p u = f \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u = 0, \ \ \Delta u = 0, \ \left(x, t\right) \in \Gamma \times \left[0, T\right] \tag{2}$$

и с начальными условиями

$$\left[u + \mathsf{F}(u)\right]\big|_{t=0} = u^{(0)} + w^{(0)}, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^{(1)} \ , \tag{3}$$

где $p > 0$ и нелинейный оператор F действует из пространства $\mathrm{M}\left(\Omega; C^0\left(\left[0, T\right]\right)\right)$ в $\mathrm{M}\left(\Omega; C^0\left(\left[0, T\right]\right)\right)$. Здесь $\mathrm{M}\left(\Omega; C^0\left(\left[0, T\right]\right)\right)$ есть пространство измеримых функций, действующих из Ω в $C^0\left(\left[0, T\right]\right)$. Предполагается, что F является запоминающим оператором (см. [1]), который действует в каждой точке $x \in \Omega$ независимо, то есть $\left[\mathsf{F}\left(u(x, \cdot)\right)\right](t)$ зависит от $u(x, \cdot)\big|_{[0,t]}$ и не зависит от $u(y, \cdot)\big|_{[0,t]}$ для $y \neq x$.

Пусть оператор F удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases}\text{если для любых } \upsilon_1,\ \upsilon_2 \in \mathrm{M}\left(\Omega; C^0([0,T])\right) \text{ и для любого } t\in[0,T] \\ \upsilon_1=\upsilon_2 \ \text{ на } [0,\mathrm{t}], \text{то } [\mathsf{F}(\upsilon_1)](\cdot,\mathrm{t}) = [\mathsf{F}(\upsilon_2)](\cdot,\mathrm{t}) \ \text{ п.в. в } \Omega;\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\text{если } \upsilon_{\mathrm{n}} \in \mathrm{M}\left(\Omega; C^0([0,T])\right) \text{ и } \upsilon_{\mathrm{n}} \to \upsilon \text{ равномерно,} \\ \text{то } \mathsf{F}(\upsilon_n) \to \mathsf{F}(\upsilon) \text{ равномерно на } [0,T] \text{, п.в. в } \Omega;\end{cases} . \tag{5}$$

$$\begin{cases}\text{существуют такие } L>0,\ g\in L^2(\Omega), \text{ что для любого } \upsilon \in M\left(\Omega; C^0([0,T])\right) \\ \left\|[\mathsf{F}(\upsilon)](x,\cdot)\right\|_{C^0([0,T])} \le L\left\|\upsilon(x,\cdot)\right\|_{C^0([0,T])} + g(x), \text{ п.в. в } \Omega;\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases}\text{если } \upsilon \in M\left(\Omega; C^0([0,T])\right) \text{ и для любого } [t_1,t_2]\subset[0,T] \\ \upsilon(x,\cdot) \text{ является аффинной в } [t_1,t_2], \text{ п.в. в } \Omega, \\ \text{то } \{[\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_2) - [\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_1)\}[\upsilon(x,t_2)-\upsilon(x,t_1)] \ge 0, \text{ п.в. в } \Omega;\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}\text{существует такое } L_1>0, \text{ что для любого } \upsilon\in M\left(\Omega; C^0([0,T])\right) \text{ и для} \\ \forall [t_1,t_2]\subset[0,T], \text{ если } \upsilon(x,\cdot) \text{ является аффинной в } [t_1,t_2] \text{ п.в. в } \Omega, \text{ то} \\ \left|[\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_2)-[\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_1)\right| \le L_1\left|\upsilon(x,t_2)-\upsilon(x,t_1)\right| \ \text{ п.в. в } \Omega;\ L_1<1.\end{cases} \tag{8}$$

Пусть $V = H_0^2(\Omega)\cap L^{p+2}(\Omega)$. Предполагается, что

$$u^{(0)}\in V,\ w^{(0)}\in L^2(\Omega),\ u^{(1)}\in L^2(\Omega)\ , \tag{9}$$

$$f = f_1 + f_2,\ f_1\in L^2(Q),\ f_2\in W^{1,1}(0,T;V'). \tag{10}$$

Определение. Функция $u\in L^2(0,T;V)\cap H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ такая, что $\mathsf{F}(u)\in L^2(Q)$ и удовлетворяющая для любого $\upsilon\in L^2(0,T;V)\cap H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ $\left(\upsilon(\cdot,T)=0 \text{ п. в. в } \Omega\right)$ равенству

$$\iint_Q\left\{-\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial t} - [u+\mathsf{F}(u)]\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \Delta u\cdot\Delta\upsilon + |u|^p u\upsilon\right\}dxdt =$$
$$= \int_0^T {}_{V'}\langle f,\upsilon\rangle_V\,dt + \int_\Omega\left[u^{(0)}(x)+w^{(0)}(x)+u^{(1)}(x)\right]\,\upsilon(x,0)dx, \tag{11}$$

называется решением задачи (1)-(3).

Из определения решения следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}[u+\mathsf{F}(u)] + \Delta^2 u + |u|^p u = f \quad \text{в } D'(0,T;V'). \tag{12}$$

Интегрирование по частям в соотношении (11) дает следующее:

$$[u+\mathsf{F}(u)]\big|_{t=0} = u^{(0)} + w^{(0)} \text{ в } \mathrm{V}',\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^{(1)} \text{ в } L^2(\Omega) \tag{13}$$

(в смысле распределений).

В свою очередь из (12) и (13) получается соотношение (11).

Разрешимость задачи (1)-(3), в случае отсутствия запоминающего оператора $\mathsf{F}(u)$, исследована в работах различных авторов (см. напр. [2]). Соответствующая задача для параболического уравнения без нелинейного слагаемого $|u|^p u$ и с Δu исследована в работе [1]. Аналогичные задачи исследованы в работах [5]- [8].

В данной работе доказаны теоремы о существовании и единственности решений задачи (1)-(3) (теоремы 1,2).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4)-(10). Тогда задача (1)-(3) имеет по крайней мере одно решение, для которого имеет место

$$u \in W^{1,\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^\infty(0,T;V), \quad \mathsf{F}(u)\in H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{14}$$

Доказательство. Докажем теорему методом дискретизации по переменному t (см. [1]).

Разобьем отрезок $[0,T]$ точками $t_n = nk,\ n = 0,1,...,m$ на m частей. Примем следующие обозначения:

$$f_{1m}^n = \frac{1}{k}\int_{(n-1)k}^{nk} f_1(\tau)d\tau,\ \ f_{2m}^n = f_2(nk), \quad f_m^n = f_{1m}^n + f_{2m}^n,\ n=1,...,m,$$

$$u_m^0 = u^{(0)},\ w_m^0 = w^{(0)}, u_m^1 = u^{(0)} + ku^{(1)}, u_m^{-1} = u^{(0)} - ku^{(1)},$$

$$u_m^n(x) = u(x,nk),\ n = 2,...,m$$

$w_m^n(x) = [\mathsf{F}(u_m)](x,nk),\ n=1,...,m,$ п.в. в Ω, где

$u_m(x,\cdot) =$ линейная интерполяция по времени $u(x,nk)$ для $n = 0,1,...,m$ п.в. в Ω.

Аналогичным образом определяем $w_m(x,\cdot)$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{u_m^n - 2u_m^{n-1} + u_m^{n-2}}{k^2} + \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} + \frac{w_m^n - w_m^{n-1}}{k} + \Delta^2 u_m^n + \left|u_m^n\right|^p u_m^n = f_m^n \quad \text{в } V' \tag{15}$$

$$u_m^0 = u^{(0)},\ w_m^0 = w^{(0)}, u_m^1 = u^{(0)} + ku^{(1)}, u_m^{-1} = u^{(0)} - ku^{(1)}. \tag{16}$$

Действуя аналогичным образом, как это сделано в работе [1], покажем, что эта задача может быть решена шаг за шагом. Действительно, предположим, что $u_m^2,...,u_m^{n-1} \in V$ известны для любого $n \in \{3,...,m\}$ и рассмотрим задачу определения u_m^n. Почти для всякого $x \in \Omega$ $u_m(x,\cdot)$ является аффинной на отрезке $[(n-1)k, nk]$; поэтому $[\mathsf{F}(u_m)](x,nk)$ зависит только от $u_m(x,\cdot)\big|_{[-k,(n-1)k]}$, которое известно, и от $u_m^n(x)$, которое должно быть определено. Поэтому

$$w_m^n(x) = [\mathrm{F}(u_m)](x, nk) = \Psi_m^n(u_m^n(x), x), \text{п.в. в } \Omega .$$

Пусть

$$U_m^{n-1}(x) = \max_{[-k,(n-1)k]} |u_m(x,\cdot)| = \max_{j=-1,0,1,\dots,n-1} |u_m^j(x)|, \text{ п.в. в } \Omega. \quad (17)$$

Таким образом $U_m^{n-1} \in L^2(\Omega)$ и используя (6) получаем, что для любого $\upsilon \in \mathrm{M}(\Omega)$

$$\left|\Psi_m^n(\upsilon(x), x)\right| \le L \max\left\{\left|U_m^{n-1}(x)\right|, |\upsilon(x)|\right\} + g(x), \text{ п.в. в } \Omega. \quad (18)$$

Определим оператор $\hat{\Psi}_m^n : \mathrm{M}(\Omega) \to \mathrm{M}(\Omega),\ \upsilon \to \Psi_m^n(\upsilon(\cdot),\cdot)$. Согласно (5) и (18) имеем:

$\hat{\Psi}_m^n : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ аффинно ограничен и сильно непрерывен. (19)

Из (7) получается, что для любого $\upsilon \in L^2(\Omega)$

$$\left(\hat{\Psi}_m^n(\upsilon) - w_m^{n-1}\right)\left(\upsilon - u_m^{n-1}\right) \ge 0, \text{ п.в. в } \Omega;$$

Из последнего неравенства и из (18), получается, что существуют такие постоянные $c_1, c_2 \in R^+$ (зависящие от m, n, но не от υ), что для любого $\upsilon \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \hat{\Psi}_m^n(\upsilon)\upsilon dx \ge -c_1\|\upsilon\|_{L^2(\Omega)} - c_2 \quad . \quad (20)$$

Если не учесть фиксированные индексы m и n, то уравнение (15) можем записать в виде:

$$(1+k)u + k\hat{\Psi}(u) + k^2\Delta^2 u + k^2|u|^p u = \varphi \quad \text{в } V', \quad (21)$$

где $\varphi = k^2 f_m^n + (2+k)u_m^{n-1} + kw_m^{n-1} - u_m^{n-2}$. Для доказательства существования хотя бы одного решения этого уравнения воспользуемся стандартной процедурой ([1]). Пусть $\{V_j\}_{j\in N}$ последовательность конечномерных подпространств, покрывающих V; для любого $j \in N$ рассмотрим следующую конечномерную задачу:

$$\begin{cases} \text{найти } u_j \in V_j \text{ такую, что} \\ Z(u_j) = (1+k)u_j + k\hat{\Psi}(u_j) + k^2\Delta^2 u_j + k^2|u_j|^p u_j = \varphi \text{ в } V_j'. \end{cases} \quad (22)$$

Согласно (19), $Z : V \to V'$ является сильно непрерывным оператором. Из (20) получается, что этот оператор удовлетворяет еще следующему условию:

$$\frac{1}{\|\upsilon\|_V}{}_{V'}< Z(\upsilon),\upsilon>_V \to +\infty \quad \text{при} \quad \|\upsilon\|_V \to +\infty . \tag{23}$$

Отсюда по теореме Брауэра о неподвижной точке (см. [2], гл I, раздел 4.3), вытекает, что задача (22) имеет хотя бы одно решение. Умножая (22) на u_j и используя (23), получаем, что последовательность $\{u_j\}$ равномерно ограничена в V. Тогда на основании слабой компактности ограниченных множеств из V, существует такое u и можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{\tilde{j}}\}$, что $u_{\tilde{j}} \to u$ слабо в V.

Согласно компактному вложению $V \subset L^2(\Omega)$ и (19) имеем:

$$\hat{\Psi}(u_j) \to \hat{\Psi}(u) \text{ сильно в } L^2(\Omega).$$

Переходя к пределу в (22) (для $j = \tilde{j}$) при $\tilde{j} \to \infty$, получаем, что u является решением уравнения (21) (или (15)).

Умножая обе части (15) на $u_m^n - u_m^{n-1}$, суммируя по $n = 1,2,...,\ell$ для любого $\ell \in \{1,2,...,m\}$ и интегрируя по Ω, получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}-\frac{u_m^{n-1}-u_m^{n-2}}{k}\right)\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}dx+k\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}\right)^2dx+\\
&+\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left(w_m^n-w_m^{n-1}\right)\left(u_m^n-u_m^{n-1}\right)dx+\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\Delta u_m^n\left(\Delta u_m^n-\Delta u_m^{n-1}\right)dx+\\
&+\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left|u_m^n\right|^p u_m^n\left(u_m^n-u_m^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\ell}{}_{V'}\left\langle f_m^n,u_m^n-u_m^{n-1}\right\rangle_V
\end{aligned} \tag{24}$$

Согласно (7) имеем:

$$\left(w_m^n - w_m^{n-1}\right)\left(u_m^n - u_m^{n-1}\right) \ge 0 \text{ п.в. в } \Omega,\ n = 1,2,...,\ell; \tag{25}$$

кроме того

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}-\frac{u_m^{n-1}-u_m^{n-2}}{k}\right)\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}dx=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}\right)^2dx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left[\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}\right)^2-2\frac{u_m^{n-1}-u_m^{n-2}}{k}\cdot\frac{u_m^n-u_n^{n-1}}{k}\right]dx\ge\\
&\ge\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}\right)^2dx-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_\Omega\left(\frac{u_m^{n-1}-u_m^{n-2}}{k}\right)^2dx=\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\left(\frac{u_m^\ell-u_m^{\ell-1}}{k}\right)^2-\left(\frac{u^{(0)}-u_m^{-1}}{k}\right)^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\left(\frac{u_m^\ell-u_m^{\ell-1}}{k}\right)^2-\left|u^{(1)}\right|^2\right]dx,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\Delta u_m^n\left(\Delta u_m^n-\Delta u_m^{n-1}\right)dx \ge \sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left(\left|\Delta u_m^n\right|^2-\frac{1}{2}\left|\Delta u_m^n\right|^2-\frac{1}{2}\left|\Delta u_m^{n-1}\right|^2\right)dx =$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left(\left|\Delta u_m^n\right|^2-\left|\Delta u_m^{n-1}\right|^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\left|\Delta u_m^{\ell}\right|^2-\left|\Delta u^{(0)}\right|^2\right)dx, \qquad (27)$$

$$\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{p+2}dx-\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{p}u_m^n u_m^{n-1}dx \ge$$
$$\ge \sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{p+2}dx-\sum_{n=1}^{\ell}\left(\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{(p+1)\frac{p+2}{p+1}}dx\right)^{\frac{p+1}{p+2}}\cdot\left(\int_{\Omega}\left|u_m^{n-1}\right|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{p+2}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{p+2}dx-\sum_{n=1}^{\ell}\left(\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{(p+2)}dx\right)^{\frac{p+1}{p+2}}\cdot\left(\int_{\Omega}\left|u_m^{n-1}\right|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{p+2}}\ge \qquad (28)$$
$$\ge \sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{p+2}dx-\frac{p+1}{p+2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left|u_m^n\right|^{p+2}dx-\frac{1}{p+2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left|u_m^{n-1}\right|^{p+2}dx=$$
$$=\frac{1}{p+2}\int_{\Omega}\sum_{n=1}^{\ell}\left(\left|u_m^n\right|^{p+2}-\left|u_m^{n-1}\right|^{p+2}\right)dx=\frac{1}{p+2}\int_{\Omega}\left(\left|u_m^{\ell}\right|^{p+2}-\left|u^{(0)}\right|^{p+2}\right)dx.$$

Учитывая (25)-(28) в (24) имеем

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{u_m^{\ell}-u_m^{\ell-1}}{k}\right)^2-\left|u^{(1)}\right|^2\right]dx+k\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}\right)^2dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\left|\Delta u_m^{\ell}\right|^2-\left|\Delta u^{(0)}\right|^2\right)dx+\frac{1}{p+2}\int_{\Omega}\left(\left|\nabla u_m^{\ell}\right|^{p+2}-\left|u^{(0)}\right|^{p+2}\right)dx\le$$
$$\le\sum_{n=1}^{\ell}{}_{V'}\left\langle f_m^n,u_m^n-u_m^{n-1}\right\rangle_V=\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}f_{1m}^n\left(u_m^n-u_m^{n-1}\right)dx+{}_{V'}\left\langle f_{2m}^{\ell},u_m^{\ell}\right\rangle_V-{}_{V'}\left\langle f_2(0),u^0\right\rangle_V-$$
$$-\sum_{n=2}^{\ell}{}_{V'}\left\langle f_{2m}^n-f_{2m}^{n-1},u_m^{n-1}\right\rangle_V\le\left(k\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left(f_{1m}^n\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left[k\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\left(\max_{n=1,\ldots,\ell}\left\|f_{2m}^n\right\|_{V'}+k\sum_{n=2}^{\ell}\left\|\frac{f_{2m}^n-f_{2m}^{n-1}}{k}\right\|_{V'}\right)\max_{n=1,\ldots,\ell}\left\|u_m^n\right\|_V+\left\|f_2(0)\right\|_{V'}\left\|u^0\right\|_V\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left\|f_1\right\|_{L^2(Q)}^2+\frac{k}{2}\sum_{n=1}^{\ell}\int_{\Omega}\left(\frac{u_m^n-u_m^{n-1}}{k}\right)^2dx+C_1\left\|f_2\right\|_{W^{1,1}(0,T;V')}^2+\frac{1}{4}\max_{n=0,1,\ldots,\ell}\left\|u_m^n\right\|_V^2, \qquad (29)$$

где постоянная C_1 не зависит от m. Так как (29) верно для любого $\ell\in\{1,2,\ldots,m\}$, то проведя несложные преобразования получим, что

$$\left\|\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k}\right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \max_{n=1,\dots,m} \left\|u_m^n\right\|_V \le C_2, \tag{30}$$

где постоянная C_2 не зависит от m.

Пусть

$$\tilde{u}_m(x,t) = u_m^n(x), \quad \text{если} \quad (n-1)k < t \le nk, \quad n = 1,2,\dots,m; \quad \text{п.в. в } \Omega$$

и определим $\tilde{w}_m$, $\tilde{f}_m$ аналогичным образом. Тогда из (15) имеем:

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(u_m + w_m) + \Delta^2 \tilde{u}_m + |\tilde{u}_m|^p \tilde{u}_m = \tilde{f}_m \quad \text{в } V', \quad \text{п.в. на } (0,T) \tag{31}$$

и согласно (30):

$$\|u_m\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;V)}, \ \|\tilde{u}_m\|_{L^\infty(0,T;V)} \le const. \tag{32}$$

Так как

$$H^1(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(\Omega;H^1(0,T)) \subset L^2(\Omega;C^0([0,T]))$$

(с непрерывным вложением), то согласно (6) и (32)

$$\|w_m\|_{L^2(\Omega;C^0([0,T]))} \le L\|u_m\|_{L^2(\Omega;C^0([0,T]))} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \le const, \tag{33}$$

и поскольку $\varphi \to |\varphi|^p \varphi$ порождает отображение $L^{p+2}(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p+2} + \dfrac{1}{p'} = 1$, то легко проверяется, что

$$|\tilde{u}_m|^p \tilde{u}_m \in L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)). \tag{34}$$

Соотношения (31)-(34) дают:

$$\left\|u_{m_{tt}}\right\|_{L^2(Q)} \le const. \tag{35}$$

Известно, что если D банахово пространство и $\rho \in [1:+\infty)$, то $L^{\rho'}(\Omega:D') \subset \left(L^\rho(\Omega;D)\right)' = L^{\rho'}_{w^*}(\Omega;D')$, где $\rho' = \dfrac{\rho}{\rho-1}$ если $\rho \ne 1$; $1' = \infty$;

кроме того, если D рефлексивно или D' сепарабельно, то

$L^{\rho'}(\Omega:D') = \left(L^\rho(\Omega;D)\right)'$ (напр., см. [4], глава I, стр. 14)

Используя этот факт для $D = L^1(0,T)$ и полученные выше оценки, заключаем, что существуют u, w такие, что после выделения быть может под последовательности, при $m \to \infty$

$$u_m \to u \quad * \text{ - слабо в} \quad H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;V), \tag{36}$$

$$\tilde{u}_m \to u \quad * \text{ - слабо в} \quad L^\infty(0,T;V), \tag{37}$$

$$w_m \to w \quad * \text{ - слабо в } \quad L^2_{w*}\left(\Omega; L^\infty(0,T)\right), \tag{38}$$

$$u_m + w_m \to u + w \quad * \text{ - слабо в } \; L^2_{w*}\left(\Omega; L^\infty(0,T)\right) \cap H^1(0,T;V'), \tag{39}$$

$$u_{m_{tt}} \to u_{tt} \quad * \text{ -слабо в } L^2(Q). \tag{40}$$

Таким образом, переходя к пределу при $m \to \infty$ в (31), получаем (12); легко получается и (13). И это, как мы уже отметили, приводит к (11).

Известно (см.[3], глава 4), что для $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$H^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \cap L^\infty(0,T;V) \subset H^1(Q) \subset H^\varepsilon\left(\Omega; H^{1-\varepsilon}(0,T)\right) \subset$$
$$\subset L^2\left(\Omega; C^0([0,T])\right)$$

с непрерывными вложениями (последнее вложение также компактное). Поэтому, выделяя быть может подпоследовательность, имеем:

$$u_m \to u \text{ равномерно на } [0,T], \text{ п.в. в } \Omega.$$

Тогда согласно (5):

$\mathsf{F}(u) \in M\left(\Omega; C^0([0,T])\right)$ и $\mathsf{F}(u_m) \to \mathsf{F}(u)$ равномерно на $[0,T]$, п.в. в Ω.

Так как для почти всех $x \in \Omega$ $w_m(x,\cdot)$ является линейной интерполяцией по времени $w_m^n(x) = [\mathsf{F}(u_m)](x, nk)$ $(n = 0,1,\ldots,m)$, имеем

$$w_m \to \mathsf{F}(u) \text{ равномерно на } [0,T], \text{ п.в. в } \Omega.$$

Поэтому согласно (38) $w = F(u)$ п.в. в Ω. Из (6) получается, что w_m сходится сильно в $L^2\left(\Omega; C^0([0,T])\right)$.

Так как семейство непрерывных, частично линейных функций является плотным в $W^{1,1}(0,T)$, то из (8) получается, что для любого $\upsilon \in M\left(\Omega; W^{1,1}(0,T)\right)$

$$\mathsf{F}(\upsilon) \in M\left(\Omega; W^{1,1}(0,T)\right) \text{ и } \left|\frac{d}{dt}\mathsf{F}(\upsilon)\right| \le L_1 \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right| \text{ п.в. в } Q. \tag{41}$$

С другой стороны, $u \in H^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right) = L^2\left(\Omega; H^1(0,T)\right)$, поэтому $\mathsf{F}(u) \in H^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$.

Теорема 1 доказана.

Теперь докажем теорему о единственности решений задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 ,

$$p \le \frac{2}{N-2}, \qquad N \ge 3 \tag{42}$$

и для $\forall u, \upsilon \in M\left(\Omega; W^{1,1}(0,T)\right)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[F(u)-F(\upsilon)\right]\le L_2\frac{\partial}{\partial t}(u-\upsilon) . \qquad (43)$$

Тогда решение задачи (1)-(3) единственно.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 два решения задачи (1)-(3).Тогда для разности $\theta = u_1 - u_2$ имеем:

$$\theta_{tt}+\theta_t+\left[F(u_1)-F(u_2)\right]_t+\Delta^2\theta+|u_1|^p u_1-|u_2|^p u_2=0, \qquad (44)$$

$$\theta\big|_{\Gamma}=0,\ \Delta\theta\big|_{\Gamma}=0 \qquad (45)$$

$$\theta\big|_{t=0}=0, \theta_t\big|_{t=0}=0, \qquad (46)$$

$$\theta\in L^\infty(0,T;V), \qquad (47)$$

$$\theta_t\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \qquad (48)$$

Докажем, что $\theta = 0$. Для этого используем классическую процедуру, применяемую в теории линейных гиперболических уравнений (см.$[2]$, стр.28).

Пусть $s\in\left]0,T\right[$. Положим

$$\psi(t)=\begin{cases}-\int\limits_t^s\theta(\sigma)d\sigma, t\le s;\\ 0, t>s,\end{cases} \qquad \theta_1(t)=\int\limits_0^t\theta(\sigma)d\sigma \cdot$$

Отсюда ясно, что при $t\le s$

$$\psi(t)=\theta_1(t)-\theta_1(s).$$

Возьмем скалярное произведение обеих частей равенства (44) с $\psi(t)$; тогда получим

$$-\int\limits_0^s(\theta_t,\psi_t)dt+\int\limits_0^s(\theta_t,\psi)dt+\int\limits_0^s(\Delta\theta,\Delta\psi)dt+\int\limits_0^s\left(\left[F(u_1)-F(u_2)\right]_t,\psi\right)dt= ,$$
$$=\int\limits_0^s\left(|u_1|^p u_1-|u_2|^p u_2,\psi\right)dt$$

а поскольку $\psi_t=\theta, \psi(0)=-\theta_1(s)$, имеем

$$-\frac{1}{2}\|\theta(s)\|^2_{L^2(\Omega)}-\int\limits_0^s\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}dt-\frac{1}{2}\|\Delta\theta_1(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int\limits_0^s\left(\left[F(u_1)-F(u_2)\right]_t,\psi\right)dt= .\qquad (49)$$
$$=\int\limits_0^s\left(|u_1|^p u_1-|u_2|^p u_2,\psi\right)dt$$

Ясно, что при условии (42) выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_0^s\left(|u_1|^p u_1-|u_2|^p u_2,\psi\right)dt\right|\le\frac{1}{4}\|\Delta\theta_1(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+c\int\limits_0^s\left(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\Delta\theta_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt .$$

Учитывая это неравенство и условие (43) в (49), получаем

$$\frac{1}{2}\|\theta(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta\theta_1(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+L_2)\int_0^s \|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} dt \le$$

$$\le \frac{1}{4}\|\Delta\theta_1(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + c\int_0^s \left(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\theta_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt$$

или

$$\|\theta(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\theta_1(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \bar{c}\int_0^s \left(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\theta_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt,$$

откуда $\theta = 0$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Visintin A. Differential Models of Hysteresis. Springer, 1993.
2. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, 590 с.
3. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 351 с.
4. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983, 269 с.
5. Chueshov I., Lasiecka I. Attractors for Second-Order Evolution Equations with a Nonlinear Damping, J.Dynam. Differential Equations 16(2) (2004) 469-512.
6. Lasiecka I., Ruzmaikina A.R. Finite Dimensionality and Regularity of Attractors for 2-D Semilinear Wave Equation with Nonlinear Dissipation, J. Math. Anal. Appl.270 (2002) 16-50.
7. Khanmamedov A.Kh. Global Attractors for von Karman Equations with Nonlinear Interior Dissipation, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006) 92-101.
8. Khanmamedov A.Kh. Global Attractors for Wave Equations with Nonlinear Interior Damping and Critical Exponents, J. Differential Equations 230 (2006) 702-719.

YADDAŞ OPERATORU DAXİL OLAN DÖRDTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BAŞLANĞIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

S.E.İSAYEVA

XÜLASƏ

Bu işdə yaddaş operatoru daxilolan dördtərtibli yarımxətti hiperbolik tənlik üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinə baxılıb. Həmin məsələ üçün həllin varlığı və yeganəliyi isbat olunub.

Açar sözlər: histerezis, yaddaş operatoru, yarımxətti hiperbolik tənlik, məhdud uducu çoxluq, minimal qlobal attraktor

THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE FOURTH ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH MEMORY OPERATOR

S.E.ISAYEVA

SUMMARY

In this work we consider the initial-boundary value problem for one semilinear hyperbolic equation with memory operator. We prove the existence and uniqueness of the solutions for this problem.

Key words: hysteresis, memory operator, semilinear hyperbolic equation, a bounded absorbing set, a minimal global attractor

Поступила в редакцию: 18.05.2015 г.
Подписано к печати: 17.11.2015 г.